Lista de Exercícios - Teoria dos Conjuntos e Lógica

Projeto Axioma

18 de novembro de 2025

Questão 1 (Exercício proposto em sala)

Prove que se A e B são conjuntos disjuntos, então $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Questão 2

(a) Prove que uma das afirmações abaixo é verdadeira enquanto uma delas às vezes é falsa.

$$A - (B - C) = (A - B) \cup C$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

(b) Estabeleça uma condição necessária para que a afirmação que às vezes é falsa se torne sempre válida.

Questão 3

Seja S o conjunto de todas as sequências binárias infinitas (sequências formadas por 0 e 1). O conjunto S é enumerável ou não enumerável? Prove.

Questão 4

Suponha que você mostrou que se X é verdade, então Y é verdade, e que se X é falso, então Y é falso. Você mostrou que X e Y são equivalentes, ou seja, $X \Leftrightarrow Y$?

Questão 5

Para essa questão, adotaremos os números reais definidos pelo seguinte conjunto de axiomas, sem a necessidade de sua construção formal.

Axioma 1 (Propriedade Comutativa): $x + y = y + x$ e $xy = yx$

Axioma 2 (Propriedade Associativa): $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$

Axioma 3 (Propriedade Distributiva): $x(y+z) = xy + xz$

Axioma 4 (Existência de Elementos Neutros): Existem dois números reais distintos, 0 e 1, tais que para cada $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$ e $1 \cdot x = x$.

Axioma 5 (Existência de Negativos): Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.

Axioma 6 (Existência de Recíprocos): Para cada $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$.

Teorema 1.1 (Regra de Simplificação para a Adição): Se $a + b = a + c$, então $b = c$. (Isto prova que o número 0 do axioma 4 é único.)

Teorema 1.2 (Possibilidade da Subtração): Dados a e b existe um e um só x tal que $a + x = b$. Este número x representa-se por $b - a$. Em particular, $0 - a$ escreve-se simplesmente $-a$ e chama-se o simétrico de a.

A partir dos axiomas e dos teoremas apresentados, prove as afirmações abaixo. Lembre-se que as únicas informações que você tem são as apresentadas e que você deve concluir as afirmações abaixo por meio de uma construção lógica e matemática.

(a) $b - a = b + (-a)$

(b) $-(-a) = a$

(c) $a(b - c) = ab - ac$

(d) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$